МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»
(ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

УТВЕРЖДАЮ
Врио ректора ФГБОУ ВО
«ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»
____________________ Д.В. КРЕТОВ
«27» октября 2022 г.

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ПРИ ПРИЕМЕ НА ОБУЧЕНИЕ ПО ПРОГРАММАМ ПОДГОТОВКИ НАУЧНЫХ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В АСПИРАНТУРЕ

Наименование и шифр научной специальности
1.1.2 – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Липецк – 2022

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

К вступительным испытаниям по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре допускаются лица, имеющие образование не ниже высшего (специалитет или магистратура).

Программа вступительного экзамена разработана в соответствии с уровнями высшего образования и содержит основные разделы теории дифференциальных уравнений и математической физики, необходимые для последующего освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по данной специальности.

Цель вступительного экзамена – оценить сформированность профессиональных компетенций, глубину знаний и определить степень готовности поступающего к освоению программы аспирантуры по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Задачи:

- определить уровень сформированности профессиональных компетенций претендента;
- определить уровень подготовленности поступающего к научно-исследовательской деятельности;
- определить уровень научной эрудиции претендента, круг его научных интересов, их соответствие программе подготовки;
- определить уровень сформированности умений решать исследовательские и практические задачи;
- определить уровень сформированности навыков системного и критического мышления.

Вступительный экзамен проводится в письменной форме и предполагает последующее устное представление ответов. Поступающий должен ответить на два вопроса из представленных ниже тем. Возможны дополнительные вопросы.

Уровень знаний поступающего оценивается по 100-балльной системе. Максимальный балл - 100. Минимальный положительный балл - 40.

Критерии оценивания результатов ответа по уровням (оценкам)

Оценка	Критерии
80 - 100 баллов	1.Ответ грамотный, полный. Ответы излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений. 2. Демонстрируются глубокие знания дисциплин, относящихся к специальности. 3. Даны обоснованные ответы на дополнительные вопросы комиссии 4. Ответы хорошо аргументированы, при ответах использованы знания, приобретённые ранее. 5. В ответах четко проявляется способность к исследовательской деятельности.
60 - 79 баллов	1.Ответ грамотный, ответы на поставленные вопросы в билете излагаются систематизировано и последовательно.

	2. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер. 3. Материал излагается уверенно, в основном правильно даны все определения и понятия. 4. Допущены непринципиальные неточности при выводах и использовании терминов. 5. В ответах проявляется определенная способность исследовательской деятельности.
40 - 59 баллов	1. Ответ в целом грамотный, но допускаются нарушения в последовательности изложения при ответе. 2. Демонстрируются поверхностные знания дисциплин специальности. 3. Имеются затруднения с выводами. 4.Определения и понятия даны нечётко. 5.Навыки исследовательской деятельности представлены слабо.
0 - 39 баллов	1. Ответ неграмотный с принципиальными ошибками. Материал излагается непоследовательно, не представляет определенной системы знаний по дисциплине. 2.Не даны ответы на дополнительные вопросы комиссии. 3. Допущены грубые ошибки в определениях и понятиях. 4. Отсутствуют навыки исследовательской деятельности.

2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Раздел 1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Основные понятия. Общие и частные решения ДУ.
2. Задача Коши для ДУ первого порядка. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ первого порядка.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли. Подстановка Эйлера-Бернулли и метод вариации произвольной постоянной.
5. Однородные ДУ и сводящиеся к ним.
6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Общие и специальные уравнения Рикатти.
8. Особые точки ДУ на примере ДУ первого порядка: узел, седло, фокус, центр, дикритический узел.
9. Примеры использования ДУ: задачи о торможении движущегося тела, об остывании тела, о разряде конденсатора, о форме движущегося зеркала.
10. Ортогональные траектории к однопараметрическому семейству кривых.
11. Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.
12. ДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной. Огибающая однопараметрического семейства кривых. Уравнения Клеро и Лагранжа. Особые решения ДУ.
13. Метод изоклин.

Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для n -го порядка.
2. Основные способы понижения порядка для ДУ второго порядка.
3. Основные способы понижения порядка для ДУ порядка выше второго. Формула Коши.
4. Линейные ДУ: основные понятия и теоремы. Признаки линейной зависимости и линейной независимости частных решений линейного однородного ДУ n -го порядка. Структура общего решения линейного однородного ДУ n -го порядка. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Луивилля.
5. Решение линейных однородных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами.
6. Структура общего решения линейного неоднородного ДУ n -го порядка. Нахождение частного решения методом вариации произвольных постоянных.
7. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.
8. Колебания линейного осциллятора (на примере механического и электрического осцилляторов).
9. Уравнения Эйлера, Чебышева. Уравнения Бесселя. Свойства функции Бесселя. Частные случаи функций Бесселя. Ортогональность функций Бесселя и их корни. Разложение произвольной функции в ряд по функциями Бесселя.
10. Решение линейных однородных ДУ с переменными коэффициентами с помощью рядов.
11. Понижение порядка линейного однородного ДУ при известных частных решениях.
12. Элементы теории установившихся колебаний. Построение периодических решений линейных ДУ с постоянными коэффициентами с помощью тригонометрического ряда.
13. Решение уравнений колебаний с разрывным внешним воздействием путем «склеивания» частных решений.
14. Понятие о методе малого параметра.
15. Понятие о осцилляции решений линейного однородного ДУ второго порядка.

Системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия. Сведения системы ДУ к одному ДУ более высокого порядка (метод исключения).
2. Решение нормальной системы линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера.
3. Нахождение частного решения нормальной системы линейных неоднородных ДУ методом вариации произвольных постоянных.
4. Первые интегралы системы ДУ.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Пикара). Теорема Пеано (без доказательства). Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.
6. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам. Уравнения в вариациях.

7. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля для уравнений 2-го порядка. Метод вариации постоянных.
8. Решение систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
9. Понятие о краевых задачах для ДУ.

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений

1. Непрерывная зависимость решения ДУ первого порядка и параметров от начальных условий на конечном отрезке изменения аргумента.
2. Понятие об устойчивости по Ляпунову решений системы ДУ.
3. Устойчивость систем линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения в частных производных

1. Краевые, начальные, граничные условия. Примеры постановок задач для уравнений с частными производными. Примеры корректно и некорректно поставленных задач (задача Коши для волнового уравнения, пример Адамара, обратное уравнение теплопроводности и т.д.).
2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Общее решение.
3. Квазилинейные уравнения с частными производными 1 порядка. Общее решение.
4. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных.
5. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Пример несуществования аналитического решения задачи Коши с аналитическими данными для уравнений не типа Коши-Ковалевской.
6. Существование и единственность аналитических решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1 порядка.
7. Теорема Коши–Ковалевской.
8. Обобщения теоремы Коши-Ковалевской. Характеристика системы уравнений.

Раздел 2. Математическая физика

Математический анализ

1. Предел числовой последовательности и функции; критерий Коши существования предела. Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; свойства функций, заданных на отрезке.
2. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Рол-ля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях; формула Тейлора. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций правила Лопиталя.
3. Неопределенный и определенный интеграл, формула Ньютона – Лейбница. Основные приемы интегрирования.
4. Функции многих переменных: пределы, непрерывность; дифференциал и частные производные функции многих переменных; производная по направлению; дифференцирование сложных функций; условный экстремум; теорема о неявном отображении.

5. Числовые ряды: критерий Коши; признаки сходимости; абсолютная и условная сходимость; теорема Римана. Функциональные последовательности и ряды: теоремы о предельном переходе; о непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании.

6. Степенные ряды, формула Коши – Адамара; непрерывность суммы степенного ряда; почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

7. Несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; ряд Фурье и интеграл Фурье, преобразование Фурье.

8. Двойной интеграл и интегралы высшей кратности, замена переменных в кратном интеграле; несобственные кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.

Алгебра и аналитическая геометрия

1. Системы линейных уравнений, ранг матрицы; определители, их свойства. Векторные пространства; базис и размерность; подпространства; сумма и пересечение подпространств; прямые суммы.

2. Билинейные и квадратичные формы; приведение квадратичной формы к нормальному виду; закон инерции; положительно определенные квадратичные формы; критерий Сильвестра.

3. Аффинные и евклидовы аффинные пространства. Движения евклидова пространства; классификация движений трехмерного пространства; группа невырожденных аффинных преобразований и группа движений.

4. Векторы: скалярное, векторное и смешанное произведение. Прямая линия и плоскость. Линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Поверхности второго порядка: эллипсоид; гиперболоид; параболоид; цилиндр; конические сечения.

Теория функций комплексной переменной

1. Дифференцируемость комплексной функции комплексной переменной. Условие дифференцируемости. Дифференцируемость степенных рядов. Аналитические функции. Гармонические функции.

2. Интеграл функции комплексной переменной.

3. Аналитическое продолжение. Теорема единственности для аналитических функций.

4. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

5. Вычеты. Вычисление вычетов. Основная теорема вычетов. Применение теории вычетов к вычислению интегралов.

Функциональный анализ

1. Метрические и нормированные пространства. Банаховы и гильбертовы пространства.

2. Пространства интегрируемых функций Lp. Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимость.

3. Линейные операторы и функционалы. Теорема Хана-Банаха. Теорема Банаха-Штейнгауза.

4. Линейные операторы и функционалы в гильбертовых пространствах.

5. Компактные и сопряженные операторы в банаховых пространствах.

6. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Спектральная теорема.

7. Теоремы о неподвижной точке. Принцип Банаха. Метод последовательных приближений. Принцип Шаудера.

8. Линейные операторы; собственные векторы и собственные значения; понятие о жордановой нормальной форме.

9. Евклидовы векторные пространства, ортонормированные базисы; процесс ортогонализации; ортогональные матрицы; линейный оператор, сопряженный к данному, приведение квадратичной формы к главным осям; ортогональные и унитарные линейные операторы; канонический базис для них.

Уравнения математической физики

1. Основные уравнения математической физики. Постановки начально-краевых задач.
2. Решение смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье).
3. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства.
4. Гармонические функции и их свойства: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимости особенности.
5. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения и условия разрешимости.
6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение задачи Коши в различных классах начальных функций.
7. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом преобразования Фурье. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, их физический смысл.
8. Пространства Соболева и их свойства.
9. Обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений 2-го порядка общего вида: эллиптического, гиперболического и параболического. Применение метода Галёркина.
10. Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса.
11. Численные методы решения задач математической физики: бегущего счета (гиперболические уравнения), явные и неявные схемы (параболические уравнения), итерационные методы (уравнение Лапласа).

3. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка.
2. Уравнения с разделяющими переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Уравнение Бернулли.
6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Уравнения Клеро и Лагранжа.

8. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка.

9. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общие свойства решений.

10. Понятие линейной зависимости и независимости системы функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

11. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

12. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

13. Метод вариации произвольных постоянных.

14. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

16. Понятие о краевых задачах. Задача Штурма - Лиувилля.

17. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключения.

18. Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.

19. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

20. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям в частных производных.

21. Постановка задач для основных уравнений математической физики.

22. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка.

23. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.

24. Понятие о краевых задачах для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

25. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Функция Грина.

26. Представление решений дифференциальных уравнений рядами. Функции Бесселя.

27. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона-Якоби.

28. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши-Ковалевской

29. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера. Метод Фурье для колебания струны.

30. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Принцип максимального значения. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.

31. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

32. Постановка внешних и внутренних краевых задач для уравнения Лапласа. Условие разрешимости внутренней задачи Неймана. Функция Грина для внутренней задачи Дирихле.

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Мальцев И.А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001.
2. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: МФТИ, 2011.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука; Физматлит, 1999.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. М.: Дрофа, 2003.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 т. М.: Физматлит, 2005.
6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: в 2 т. СПб.: Лань, 2005.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит, 2010.
8. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1984.
9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2003.
10. Ащепков Л.Т. Лекции по оптимальному управлению. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1996.
11. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: учебник для вузов: в 2 кн. М.: МЦНМО, 2011. Кн. 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование; Кн. 2: Оптимизация в функциональных пространствах. Регуляризация. Аппроксимация.
12. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Едиториал УРСС, 2004.
13. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: Лань, 2002.
14. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1970.
15. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
16. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
17. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
18. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992.
19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
20. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003.
21. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
22. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

Дополнительная литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
5. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2001.