

ВСЕРОССИЙСКАЯ (С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ) СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
«СПЕКТР» (МАТЕМАТИКА)

ОРГАНИЗАТОР ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П. П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО

Финальный этап, 25.12.2024

1. Определите сумму корней уравнения $\sin(\pi x^{2024}) + \cos^{2025}(\pi x) = \sqrt[2025]{|x|} - 2 \cdot x^{2024}$ на отрезке $[-2024^{2025}; 2024^{2025}]$.

Решение. Функции в правой и левой частях данного уравнения чётные. Следовательно, если $x = x_0$ является корнем уравнения, то корнем уравнения будет и $x = -x_0$. Уравнение имеет корни, например ± 1 . В следствии указанного, искомая сумма равна 0.

Ответ: 0.

2. Определите геометрическое место точек, равноудалённых от графиков функций $f(x) = x^{2025} + 2024$ и $g(x) = \sqrt[2025]{x - 2024}$.

Решение. Данные в условии задачи функции взаимнообратные, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, геометрическое место точек, равноудалённых от графиков функций $f(x) = x^{2025} + 2024$ и $g(x) = \sqrt[2025]{x - 2024}$ прямая $y = x$.

Ответ: прямая $y = x$.

3. На двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены два разноцветных короля. Найдите вероятность того, что шахматные правила не нарушены, короли не нападают друг на друга (не находятся в соседних по вертикале, горизонтали или диагонали клетках).

Решение. Определим вероятности выполнения условия задачи в следующих трёх случаях.

1. Первый король размещён в одной из четырёх угловых клеток: $p_1 = \frac{4}{64} \cdot \frac{60}{63} = \frac{5}{4 \cdot 21}$.

2. Первый король размещён в клетке на стороне доски, но не в угловой клетке: $p_2 = \frac{24}{64} \cdot \frac{58}{63} =$

$\frac{29}{4 \cdot 21}$.

3. Первый король размещён в клетке не на стороне доски: $p_3 = \frac{36}{64} \cdot \frac{52}{63} = \frac{39}{4 \cdot 21}$.

4. Искомая вероятность: $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{5 + 29 + 39}{84} = \frac{73}{84}$.

Ответ: $\frac{73}{84}$.

4. а) Приведите пример решения матричного уравнения $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 & 2026 \\ 2027 & 2028 & 2029 \\ 2030 & 2031 & 2032 \end{pmatrix}$.

б) Рассмотрите случай, когда матрицы A , B и C должны быть попарно различны.

Решение. Одним из вариантов решения может быть случай, когда одна из матриц совпадает с произведением матриц из условия, а две другие взаимно обратные.

Ответ: а) например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 & 2026 \\ 2027 & 2028 & 2029 \\ 2030 & 2031 & 2032 \end{pmatrix}$.

б) например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 & 2026 \\ 2027 & 2028 & 2029 \\ 2030 & 2031 & 2032 \end{pmatrix}$.

5. Дан приведённый многочлен n -й степени $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. При всех целых x данный многочлен делится на натуральное число k . Докажите, что $n!$ также делится на k .

На всякий случай вспомним, что Бином Ньютона – это формула $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – биномиальные коэффициенты, n – натуральное число.

Доказательство. Рассмотрим многочлены $F_1(x) = P(x) - P(x-1)$, $F_2(x) = F_1(x) - F_1(x-1)$, ..., $F_i(x) = F_{i-1}(x) - F_{i-1}(x-1)$, ..., $F_n(x) = F_{n-1}(x) - F_{n-1}(x-1)$. В каждом следующем степень каждого одночлена внутри многочлена уменьшается на 1, пока одночлен не станет степени 0, и далее не исчезнет. Поэтому $F_n(x)$ будет иметь только свободный член (получившийся из одночлена x^n многочлена $F(x)$).

Определим его величину. Пусть есть многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Тогда

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P(x) - P(x-1) = \\ &= a_0 \left(x^n - (x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}) + \dots \right) + a_1 (x^{n-1} - (x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots)) + \dots = \\ &= a_0 n x^{n-1} + \left(-a_0 \frac{n(n-1)}{2} + a_1(n-1) \right) x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом старший коэффициент многочлена $P_1(x)$ будет равен старшему коэффициенту $P(x)$ умноженному на его степень. Отсюда степень перед первым коэффициентом $F_1(x)$ будет равна n , перед первым коэффициентом $F_2(x)$ равна $n(n-1)$ и т.д., перед первым коэффициентом $F_n(x)$ равна $n!$.

Но по индукции можно показать, что все F_i делятся на k в целых точках, т.к. являются разностью многочленов с таким свойством. Значит и $F_n(x) = n!$ делится на k .