ВСЕРОССИЙСКАЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА «СПЕКТР» (МАТЕМАТИКА)

ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ П. П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Решите уравнение (sin x + 2)(cos x + 2) = 7,5.

Решение. Раскроем скобки и упростим уравнение:

$$\frac{1}{2}\sin(2x) + 2(\sin x + \cos x) + 4 = 7,5;$$

$$\frac{1}{2}\sin(2x) + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3,5 \quad (*).$$

Так как, $-\frac{1}{2} - 2\sqrt{2} \le \frac{1}{2}\sin(2x) + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$ и $\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} < 3{,}5$, то уравнение (*) корней не имеет.

Замечание. Уравнение можно решить и через замену переменной.

Ответ: корней нет.

2. Есть 12 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 по две карточки каждого вида. Таня выложила их на стол в ряд в случайном порядке слева направо, а затем убрала первую единицу, первую двойку, первую тройку и так далее. Например, если у Тани сначала была последовательность 334654625121, то получилась бы последовательность 346521. Какова вероятность того, что у Тани на столе осталась последовательность 123456?

Решение. 1. Перестановкой с повторениями данного состава $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ называется упорядоченная выборка с повторениями из $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$ элементов данного множества. Число перестановок с повторений из m элементов данного состава $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ вычисляется по формуле:

$$\tilde{P}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Общее количество вариантов в рассматриваемом случае:

$$n = \tilde{P}(2, 2, \ldots, 2) = \frac{12!}{(2!)^6} = \frac{12!}{2^6}.$$

2. Оставшиеся карточки – это вторые экземпляры каждой цифры, потому что первые экземпляры были удалены. Значит, в исходном порядке вторые экземпляры цифр должны быть по возрастанию 1, 2, 3, 4, 5, 6 после удаления первых экземпляров. Порядок оставшихся цифр определяется их относительными позициями в исходной последовательности после того, как все первые экземпляры удалены. То есть вторые экземпляры должны быть расположены в возрастающем порядке в исходной строке относительно друг друга после удаления первых.

Для подсчёта количества вариантов, удовлетворяющих условию задачи, зафиксируем последовательность вторых цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Будем добавлять последовательно первые цифры.

Вариант расположения первой цифры 1 только один, она должна стоять до вторых цифр.

Получим последовательность: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Вариантов расположения первой цифры 2 только три, в имеющейся последовательности она может стоять на первых трёх позициях.

Вариантов расположения первой цифры 3 только пять. И так далее.

Следовательно, общее количество вариантов, удовлетворяющих условию задачи, $m = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$.

3. Искомая вероятность: $p = \frac{m}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 2^6}{12!} = \frac{2^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{720}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{1}{720}}$.

3. Найдите предел $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!} \right)$.

Решение. 1. Рассмотрев несколько натуральных значений n можно сформировать гипотезу: равенство $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ справедливо для всех натуральных n.

2. Докажем предложенную гипотезу методом математической индукции. Введём обозначение $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

База. $S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1$ – верно.

Индукционный переход. Предположим, что утверждение верно для $n = k$: $S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$. Докажем утверждение для $n = k + 1$: $S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$.

Доказательство индукционного перехода.

$S_{k+1} = S_k + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$. Утверждение доказано.

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1$.

Ответ: 1.

4. Существует ли матрица, сумма которой и ей обратной матрицы есть матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**?**

Решение. Выполним поиск матрицы A удовлетворяющей условию задачи. Рассмотрим симметричную матрицу $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, тогда и матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x & 1-y \\ 1-y & 1-x \end{pmatrix}$ будет также симметричной, а, следовательно, и их произведение будет симметричной матрицей и сможет равняться единичной матрице.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & 1-y \\ 1-y & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 + y - y^2 & x - xy + y - xy \\ y - xy + x - xy & y - y^2 + x - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x - x^2 + y - y^2 = 1, \\ x - 2xy + y = 0. \end{cases}$$

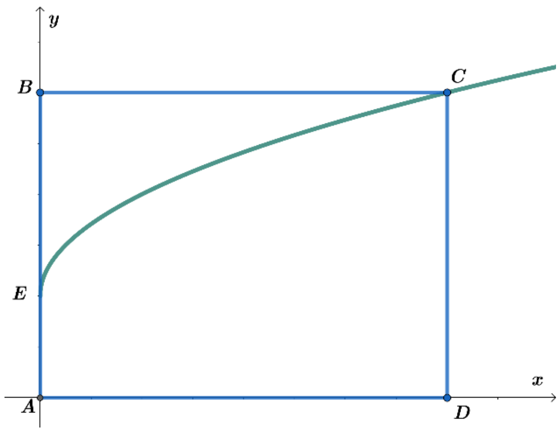
Вычтем из второго уравнения первое

$$(x - y)^2 = -1.$$

По условию задачи достаточно получить одно решение, поэтому пусть $y = x - i$.

Тогда, $2x - i - 2x^2 + 2xi = 0$, $x = \frac{i+1}{2}$, $y = \frac{1-i}{2}$.

Ответ: да, существует. Условию задачи удовлетворяет, например, матрица $\begin{pmatrix} \frac{i+1}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{i+1}{2} \end{pmatrix}$.



5. График функции $y = f(x)$ для любого положительного x делит площадь прямоугольника $ABCD$ на части площади которых относятся как 2 : 3. Найдите функцию $y = f(x)$, если координаты точек: $A(0;\ 0)$; $B(0;\ f(x))$; $C(x;\ f(x))$; $D(x;\ 0)$ и график функции $y = f(x)$ пересекает отрезок AB (возможно в крайней точке).

Решение. 1. Возможны два случая: $\frac{S_{EBC}}{S_{AECD}} = \frac{2}{5}$ или $\frac{S_{EBC}}{S_{AECD}} = \frac{5}{2}$.

2. Рассмотрим первый случай $\frac{S_{EBC}}{S_{AECD}} = \frac{2}{5}$. Тогда $3xy = 5 \cdot \int_0^x f(x)dx$.

Выполним преобразования: $5(F(x) - F(0)) = 3xf(x)$, где $f(x) = F'(x)$,

$$5\big(F(x) - F(0)\big)' = 3\big(xf(x)\big)',$$

$$5f(x) = 3f(x) + 3xf'(x),$$

$$2f(x) = 3xf'(x),$$

$$2y = \frac{3x\,dy}{dx},$$

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{3\,dy}{y},$$

$$2\ln x = 3\ln\frac{y}{C},\ y = Cx^{\frac{2}{3}},\ \text{где } C > 0.$$

3. Во втором случае, аналогично $y = Cx^{\frac{3}{2}}$, где $C > 0$.

Ответ: $y = Cx^{\frac{2}{3}}$ или $y = Cx^{\frac{3}{2}}$, где $C > 0$.

6. На окружности записано 101 целое число. 2025 раз происходит следующая операция: одновременно из каждого числа на окружности вычитается следующее по часовой стрелке, то есть из первого числа вычитается второе и записывается на место первого, из второго числа вычитается третье и записывается на место второго, и так далее, из 101-го числа вычитается первое и записывается на место 101-го. Докажите, что все полученные в итоге числа будут кратны 101.

Решение. Лемма. Некоторое число, первоначально записанное на окружности, через n (где $n = 1, 2, \ldots, 100$) ходов будет содержаться в исходной и n предшествующих позициях с коэффициентами:

$$C_n^0, -C_n^1, C_n^2, -C_n^3, \ \ldots, (-1)^{n-1}C_n^{n-1}, (-1)^n C_n^n.$$

Доказательство леммы. База индукции очевидна.

Индукционный переход следует из равенства $C_n^i + C_n^{i+1} = C_{n+1}^{i+1}$.

Таким образом, через 100 ходов некоторое число, первоначально записанное на доске, будет содержаться в полученных суммах с коэффициентами: $C_{100}^0, -C_{100}^1, C_{100}^2, -C_{100}^3, \ \ldots, -C_{100}^{99}, C_{100}^{100}$.

Тогда указанные коэффициенты через 101 ход: 0, $-C_{101}^1, C_{101}^2, -C_{101}^3, \ \ldots, -C_{101}^{99}, C_{101}^{100}$. Все коэффициенты кратны 101. Полученное утверждение верно для всех чисел, первоначально записанных на доске. Поэтому все числа, первоначально записанные на доске, через 101 ход будут включены во все суммы с коэффициентами кратными 101. Через 101 ход все полученные в итоге числа будут кратны 101.

Кратность 101 будет сохраняться и в дальнейшем, в том числе, и через 2025 ходов.