

**МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ 9-11 КЛАССОВ «СПЕКТРИК» (МАТЕМАТИКА)**

**РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА**

**1. В таблице две строки и 2025 столбцов. Каждое число из первой строки таблицы больше соответствующего числа из второй строки данной таблицы. Может ли произведение всех 2025 чисел первой строки оказаться меньше, чем произведение всех чисел из второй строки?**

**Решение.** Например, пусть 2024 первых чисел в первой строке 1, а 2025 число 2. Во второй строке 2023 первых чисел – 1, 2024-е число – 3, а 2025 число 1. Тогда произведение всех чисел первой строки равно 2, а произведение всех чисел второй строки равно 3.

**Ответ:** да, может.

**2. Может ли сумма нескольких чисел быть равна 2025, а сумма кубов этих же чисел быть меньше  $\frac{1}{2025}$ ?**

**Решение.** Возьмём, например,  $2025 \cdot 10^6$  чисел  $10^{-6}$ . Сумма чисел 2025, а сумма их кубов:

$$2025 \cdot 10^6 \cdot 10^{-18} = 2025 \cdot 10^{-12} < \frac{1}{2025}.$$

**Ответ:** да, может.

**3. Модель анализирует изображение и распознаёт кто на нём, кошка или собака.**

**При тестировании данной модели оказалось, что, если на исходном изображении:**

- кошка, то модель ошибается в 5% случаев,
- собака, то модель ошибается в 10% случаев.

**Всего в тестовой выборке было 200 изображений.**

**После работы модели эксперты насчитали 18 ошибок.**

**Сколько в выборке было изображений с кошками, а сколько с собаками?**

**Решение.** Пусть  $x$ ,  $y$  – количество изображений соответственно кошек и собак с ошибками ( $x, y \in N$ ).

Тогда,  $20x$ ,  $10y$  – общее количество изображений соответственно кошек и собак.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 20x + 10y = 200, \\ x + y = 18. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим:  $x = 2$ ;  $y = 16$ .

**Ответ:** 40 кошек и 160 собак.

**4. Искусственный интеллект (ИИ) маркетплейса «Рога и копыта» сформировал хитрую стратегию привлечения клиентов. В течении месяца стоимость одного из видов мужских брюк**

изменяется по функциональной зависимости  $y = -2,5(x - 12)^2 + 2000$  руб, а стоимость пиджака для указанных брюк определяется как  $y = 4(x - 16)^2 + 3500$  руб. В указанных зависимостях  $x$  – это порядковый номер дня в месяце, а  $y$  – стоимость в рублях. Стоимость округляется до целых.

Для того, чтобы качественно сделать примерку костюма из брюк и пиджака их нужно приобрести в один день.

Увлекающийся математикой школьник сумел выявить указанные функциональные зависимости, а затем посчитал в какой день выгоднее оформить покупку. Определите какую сумму пришлось заплатить родителям, которые последовали совету умного школьника.

**Решение.** 1. Пусть  $f(x) = -2,5(x - 12)^2 + 2000$  руб и  $g(x) = 4(x - 16)^2 + 3500$  руб. Оптимизируем значение функции  $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\varphi(x) = 1,5x^2 - 68x + 6164$  руб при  $x = 1; 2; \dots; 31$ .

2. Наименьшее значение квадратичной функции с положительным первым коэффициентом достигается в вершине параболы.  $x_{\text{вершины}} = -\frac{-68}{3} = 22\frac{2}{3}$ , следовательно, наименьшее значение достигается при  $x = 22$  или  $x = 23$ .

$$\varphi(22) = 1,5 \cdot 22^2 - 68 \cdot 22 + 6164 = 5394 \text{ руб.}$$

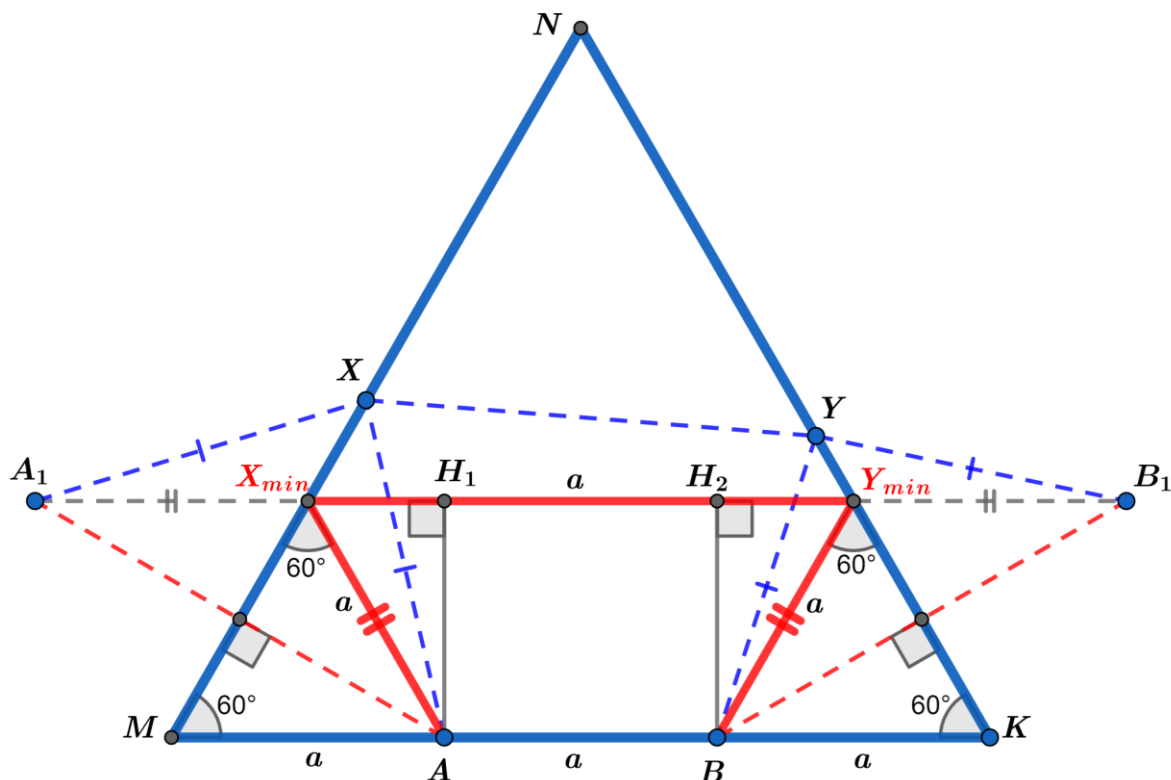
$$\varphi(23) = 1,5 \cdot 23^2 - 68 \cdot 23 + 6164 = 5393,5 \text{ руб.}$$

Округляться может только значение одной из двух исходных функций, у другой все коэффициенты целые. Поэтому, с учётом округления, итоговый результат 5 393 руб.

**Ответ: 5 393 руб.**

**5. Точки  $A$  и  $B$  делят одну сторону равностороннего треугольника на три равные части. В точке  $A$  находится робот, который должен добраться кратчайшим путём до точки  $B$  посетив при этом две другие стороны треугольника. Определите отношение длины наименьшего пути робота к длине отрезка  $AB$ .**

**Решение.** 1. Пусть  $MNK$  данный равносторонний треугольник, а его сторона равна  $3a$ . Тогда требуется минимизировать путь  $AXYB$ , где  $X$  и  $Y$  принадлежат, соответственно, сторонам  $MN$  и  $NK$  данного треугольника. Путь  $AYXB$  не является оптимальным.



2. Пусть точки  $A_1$  и  $B_1$  симметричны точкам  $A$  и  $B$  относительно прямых  $MN$  и  $NK$  соответственно. Тогда,  $A_1X + XY + YB_1 = AX + XY + YB$ . Следовательно, кратчайший путь от  $A$  до  $B$  с заходом на две другие стороны треугольника, равен расстоянию от  $A_1$  до  $B_1$ . Прямая  $A_1B_1$  параллельна прямой  $AB$  из соображений симметрии.

3. Определим длину отрезка  $A_1B_1$ . Пусть  $X_{min}$  и  $Y_{min}$  — точки пересечения отрезка  $A_1B_1$  с прямыми  $MN$  и  $NK$  соответственно.

4. Так как,  $\angle AX_{min}M = \angle A_1X_{min}M = \angle AMX_{min} = 60^\circ$ , то  $\triangle AMX_{min}$  равносторонний,  $AX_{min} = a$ ,  $X_{min}H_1 = \frac{a}{2}$ .

Аналогично,  $Y_{min}H_2 = \frac{a}{2}$ .

Таким образом, искомое наименьшее расстояние  $AX_{min} + X_{min}Y_{min} + Y_{min}B = 4a$ .

**Ответ: 4.**